

Analiza zespolona
Lista 5

Zad 1. Wykazać, że dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

- a) $e^z \neq 0$,
- b) $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$,
- c) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Zad 2. Narysować obraz zbioru $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}z < \pi \wedge \text{Re}z < 0\}$ przy odwzorowaniu $f(z) = e^z$.

Zad 3. Wykazać, że

- a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1$
- b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$
 $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$
- c) $\sin iz = i \text{sh}z, \quad \cos iz = \text{ch}z.$

Na podstawie a), b), c) wyznaczyć $|\cos z|, |\sin z|$.

Zad 4. Wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $\sin z, \cos z, \text{sh}z, \text{ch}z$.

Zad 5. Niech $f(z)$ będzie ustaloną gałęzią logarytmu $\ln z$. Znaleźć $f(D)$, gdzie

$$D = \{z \in \mathbb{C} : e^{-1} < |z| \leq e\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0 \text{ i } \text{Re}(z) \leq 0\}.$$

Zad 6. Niech $f(z) = \sin z$. Znaleźć $f(A)$, gdzie

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right\}.$$

Zad 7. Zbadać czy ciąg jest ograniczony:

- a) $z_n = e^{in},$ b) $z_n = \frac{(2-i)^n}{n},$ c) $z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n$ d) $z_n = \frac{3n+1}{(-1)^{n+2i}},$ e) $dz_n = \frac{in+1}{n+1}.$

Zad 8. Znaleźć granicę ciągu:

- a) $z_n = \left(1 + \frac{in}{n}\right)^n,$ b) $z_n = \frac{n!}{(ni)^n},$ c) $z_n = \frac{2^n+i}{2^n-i},$ d) $z_n = \frac{in+1}{n+i},$ e) $z_n = \frac{1}{2^n} + i\frac{1}{3^n}.$

Zad 9. Sprawdzić, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$

Zad 10. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3i}}{(i\sqrt{n})^3}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+2i}.$$

Zad 11. Zbadać bezwzględną zbieżność szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\sqrt{n+1}}{n}.$$

Zad 12. Wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną liczby $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}$.

Zad 13. Znaleźć sumy szeregów: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nt, \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin nt,$ gdzie $r, t \in \mathbb{R}, 0 \leq r < 1$.

Zad 14. Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} z^n, \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} z^{n^2}.$$